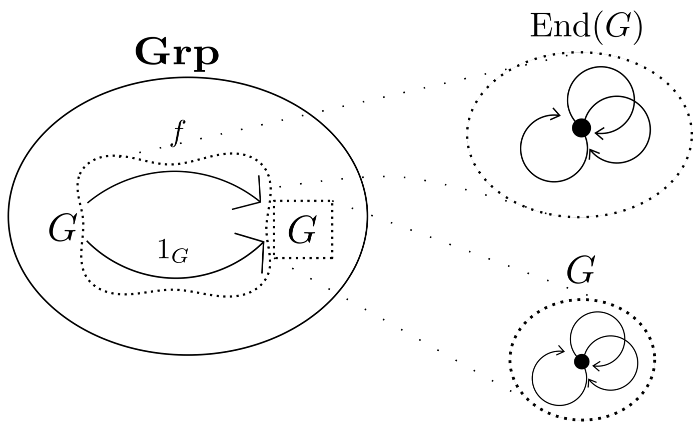
Lección n°3: Funtores.

EPN, 2021

Como hemos podido observar, la definición de categoría es bastante versátil y puede presentarse en distintos niveles de complejidad y jerarquía. Como ejemplo, consideremos la categoría **Grp**, esta categoría está compuesta a su vez por objetos (que son categorías de un solo elemento) y por flechas que, en sus colecciónes de isomorfismos, también forman grupos; los cuales son, de nuevo, categorías.



Por tanto, las flechas de **Grp** se pueden ver también como funciones que van de una categoría a otra. Existe así una noción de funciones entre categorías.

Definición. *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías. Un **funtor** $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ consiste de dos funciones*

$$F_1 : \mathrm{ob}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{ob}(\mathscr{B}),$$

$$F_2 : \mathrm{Hom}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{B}),$$

tal que para todo $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A})$, si $f : A \to B$, entonces $F_2(f) : F_1(A) \to F_1(B)$. Sin temor a confusiones, escribiremos F tanto para referirnos a F_1, como a F_2. Además, se cumplen las siguientes condiciones de compatibilidad:

- $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$ *cada vez que la composición de f y f' tenga sentido en $\mathscr{A}$.*
- $F(1_A) = 1_{F(A)}$ *para todo $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr] & B \arrow[d] & & F(A) \arrow[r] \arrow[dr] & F(B) \arrow[d] \\
& C \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{\;F\;}"] & & & F(C)
\end{tikzcd}$$

Un funtor es entonces una función de categorías que respeta su estructura: los objetos y flechas tienen como imagen objetos y flechas, respectivamente. Las propiedades de la composición y la identidad se mantienen.

6. Ejemplos

- Para toda categoría $\mathscr{A}$ se define el **funtor identidad** $1_{\mathscr{A}}$, dado, de forma evidente, por: $1_{\mathscr{A}}(A) = A$, $1_{\mathscr{A}}(f) = f$, para todo $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A})$
- Todo funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ se le dirá **endofuntor**.
- Si tenemos un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, podemos definir su **funtor opuesto** $F^{op} : \mathscr{A}^{op} \to \mathscr{B}^{op}$ de la siguiente manera: $F^{op}(A) = F(A)$ para todo $A \in \mathrm{ob}(A) = \mathrm{ob}(A^{op})$

  $F^{op}(f) = F(f)$ para todo $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A})$.

  Por tanto, no es diferente al funtor F más alla de que las categorías A^{op} y B^{op} son distintas a A y B, respectivamente.
- Dos funtores $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, $G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ se pueden componer en otro funtor, el **funtor composición** $G \circ F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, definido de la siguiente manera:

  $(G \circ F)(A) = G(F(A))$, $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ para todo $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A})$.

Ejercicio 6.1. *Pruebe que el funtor composición de dos funtores es realmente un funtor.*

Podemos ahora formar la categoría **CAT** en donde los elementos son las categorías y las flechas son funtores entre las mismas, las identidades son los funtores identidad y la composición de dos funtores es el funtor composición. Por otro lado, escribiremos **Cat** para la categoría que tiene como elementos a las categorías pequeñas y flechas a los funtores.

Observación 11. *Notemos que la categoría* **CAT** *tiene un aspecto peligroso, pues* **CAT** $\in$ ob(**CAT**)*, y por lo tanto la categoría* **CAT** *pertenece a sí misma. Pero las axiomatizaciones estándar de teoría de conjuntos, como Zermelo-Fraenkel junto con el axioma de elección (ZFC), prohíben esto para todo conjunto, so pena de entrar en paradojas como la de Russell.*

Es entonces, inevitablemente, **CAT** *una clase propia, y es usual que a este tipo de categorías tan grandes se les conozca como* ***metacategorías****. También es común que, para trabajar con este tipo de entes matemáticos, sea necesario modificar la axiomatización de la teoría estándar de conjuntos, añadiendo enunciados que asumen la existencia de conjuntos extremadamente grandes, que tienen muy buenas propiedades y que son conocidos como* ***Universos de Grothendieck****. Como referencia se puede revisar el libro "Categories and Sheaves" de Masaki Kashiwara y Pierre Schapira.*

Por lo tanto, para no entrar en detalles demasiado técnicos, se trabajará siempre en la categoría **Cat***, a menos que se diga explícitamente lo contrario. Esta categoría no tendrá problemas ya que no pertenece a sí misma, pues no es pequeña. Siendo más precisos tenemos lo siguiente.*

Lema 6.1. **Cat** *no es un categoría pequeña, pero sí localmente pequeña.*

Demostración. **Cat** contiene en sus objetos a todos los conjuntos, ya que a cada conjunto lo podemos ver como una categoría discreta. Como la clase de todos los conjuntos es una clase propia, entonces ob(**Cat**) también debe serlo. Por tanto, **Cat** no es pequeña.

Cat es localmente pequeña, ya que si escogemos cualesquier dos categorías pequeñas $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$$

es la clase de todos los funtores de $\mathscr{A}$ hacia $\mathscr{B}$, pero esta clase es un conjunto. En efecto, no es difícil ver que cada funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ está determinado por la función $\mathrm{Hom}(\mathscr{A}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{B})$ definida por $f \mapsto F(f)$. Por tanto, basta probar que la clase de todas las funciones entre un par de conjuntos, es a su vez un conjunto.

Esto es directo ya que, por la teoría estándar de conjuntos (ZFC), si $(B_i)_{i\in I}$ es una familia indexada de conjuntos e I es un conjunto, entonces su producto $\prod_{i\in I} B_i$ es un conjunto.

Ahora, denotando por B^A la clase de todas las funciones $A \to B$ entre dos conjuntos, es rutinario probar que

$$B^A = \prod_{a\in A} B,$$

con lo que podemos concluir. □

Observación 12. *A un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ que es un isomorfismo, al ser visto como flecha en la categoría **Cat**, también le diremos **isomorfismo de categoría**. Sin embargo, la estructura de **Cat** es bastante más compleja que la de la mayoría de categorías y sucede que la noción de isomorfismo de categorías no es adecuada para hablar de similitud entre dos categorías $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$. Más adelante estudiaremos la noción de equivalencias de categorías, en el contexto de transformaciones naturales, la cual resulta más conveniente.*

Algunas construcciones en categorías que se han revisado, definen funtores:

Ejemplo 6.2. *Existe un funtor $(-)^{op} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$ tal que a cada categoría (pequeña) $\mathscr{A}$ se le asigna A^{op}, y para cualquier flecha entre categorías, es decir un funtor F, se le asigna su funtor opuesto F^{op}.*

Ejemplo 6.3. *Existe un funtor*

$$\times : \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat},$$

tal que a cada par de categorías $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, le asigna su categoría producto $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ y a cada par de flechas (en este caso funtores) $F : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$, $G : \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$, les asigna el funtor $F \times G : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{A}' \times \mathscr{B}$ el cual se define como $(F \times G)(a, b) = (F(a), G(b))$ para todo $(a, b) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$. La composición se define como $(F \times G) \circ (F' \times G') = (F \circ F') \times (G \circ G')$.

Ejemplo 6.4. *Dada una categoría $\mathscr{A}$ y un elemento A, recordemos que se ha definido, en la lección 2, a la categoría $\mathrm{Hom}(A, -)$. Ahora, podemos usar sus objetos y flechas, para definir un funtor $\mathrm{Hom}(A, -) : \mathscr{A} \to$**Set** (usamos la misma notación porque hay poco riesgo de confusión), tal que para cualquier $B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, se le asigna $\mathrm{Hom}(A, B)$, además si es que $f : B \to B'$ es una flecha en $\mathscr{A}$, se le asigna entonces la función $\mathrm{Hom}(A, f) : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, B')$*

Observación 13. *Es muy común que este funtor sea escrito como h^A o H^A.*

Ejemplo 6.5. *Consideremos dos monoides M, N vistos como categorías entonces un funtor*

$$F : \mathscr{M} \to \mathscr{N},$$

cumple que envia el único elemento de $\mathscr{M}$ al único elemento de $\mathscr{N}$, además por los axiomas de funtor se verifica que $F(g'g) = F(g)F(g')$ con $g, g' \in M$ vistos como flechas en $\mathscr{M}$. Así, en realidad este funtor es un homomorfismo de monoides. Similarmente para grupos.

Ejemplo 6.6. *Sea M un monoide, visto como una categoría $\mathscr{M}$, entonces un funtor $F : \mathscr{M} \to$ **Set** se puede ver como un $M-$conjunto por la izquierda, en el sentido de que determina de forma única, un conjunto equipado con una **acción de M por la izquierda**.*

En efecto, notemos en primer lugar que $\mathscr{M}$ solo consta de un elemento $\bullet$, por tanto la imagen de F consta de un solo conjunto S.

Por otro lado, cada flecha de $\mathscr{M}$, digamos $g : \bullet \to \bullet$, con $g \in M$, cumple con que $F(g) : S \to S$ y además, se satisfacen los axiomas de funtor. Ahora para el conjunto S definimos una acción por la izquierda, declarando

$$g \cdot s := (F(g))(s) \qquad g \in M, s \in S.$$

No es difícil, por los axiomas de funtor, probar que $(g'g) \cdot s = g' \cdot (g \cdot s)$ y $1 \cdot s = s$ para todo $g, g' \in M$ y $s \in S$, lo que es justamente lo necesario para que $\cdot$ sea una acción por la izquierda.

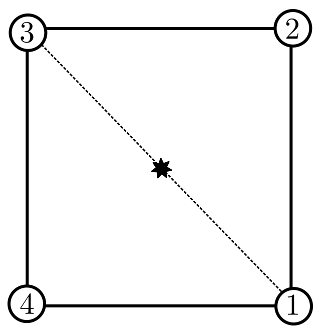
Ejemplo 6.7. *De manera similar, todo funtor $F : \mathscr{G} \to$ **Set**, con $\mathscr{G}$ un grupo visto como categoría, es un conjunto equipado con una acción de grupo por la izquierda.*

Observación 14. *La visión de un grupo como una categoría de un solo objeto no es demasiado rebuscada, pues podemos pensar que todo grupo actúa sobre sí mismo por la izquierda (y por la derecha también) con su propia operación de grupo. Por tanto, podemos elegir $\bullet = G$, más aún todo grupo es isomorfo a un subgrupo del grupo de permutaciones de algún objeto (gracias al teorema de Cayley).*

Por otro lado, para ilustrar una acción de grupo, consideremos el grupo dado por la representación

$$D_4 = \{r^4 = s^2 = e,\ rs = sr^{-1}\},$$

el cual tiene ocho elementos: $e, r, s, r^2, r^3, rs, r^2s, r^3s$; actuará sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ que simboliza los 4 vértices de un cuadrado



En efecto, definimos una acción, es decir un funtor

$$F : D_4 \to \textbf{Set},$$

con $F(\bullet) = A$, que asigna al elemento r, la rotación de 90° de los vértices, con respecto al centro del cuadrado (indicado por una estrella en la ilustración anterior). Es decir, es la permutación

$$F(r) :\ (1\ 2\ 3\ 4) \longrightarrow (2\ 3\ 4\ 1),$$

y para el elemento s, le asignamos la reflexión del cuadrado a través de la diagonal (indicada por un segmento interlineado) con lo cual tenemos que

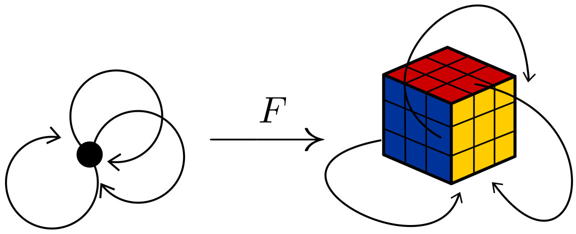
$$F(s) :\ (1\ 2\ 3\ 4) \longrightarrow (1\ 4\ 3\ 2).$$

De esta manera, ya que s y r generan a todo el grupo D_4, entonces F está definida para todos los elementos. Luego

$$\{F(g)\}_{g\in D_4} \subsetneq S_4,$$

donde S_4 es el grupo de permutaciones de cuatro elementos. Por medio de la acción F, el grupo D_4 representa todas las simetrías, por reflexión y rotación, que tiene un cuadrado.

Existe otro grupo G, realmente grande (véase "Group Theory via Rubik's Cube" de Tom Davis), que actúa sobre el conjunto $\{1, 2, \ldots, 54\}$ que enumera a cada una de las pequeñas caras de un cubo de Rubick. Además, la función F que define la acción cumple que cada $F(g)$ con $g \in G$ es un elemento de S_{64} y representa un movimiento válido del cubo de Rubick.



Ejemplo 6.8. *Usando teoría de categorías podemos definir una* ***representación lineal*** *de un grupo G en un $k-$espacio vectorial V, como un funtor*

$$F : \mathscr{G} \to \mathbf{Vect}_k$$

donde $F(\bullet) = V$.

Esto se puede traducir en que cada $g \in G$ define una acción para cada elemento de V como

$$g \cdot v := (F(g))(v),$$

además, por las propiedades del grupo y del funtor, se tiene que estas acciones $F(g) : V \to V$ son invertibles y lineales.

Por lo tanto, $\{F(g)\}_{g\in G} \subseteq \mathrm{End}(V)$ y desde luego $F(g'g) = F(g')F(g)$.

Es así que, de forma más convencional, también se define una representación lineal de un grupo G en un $k-$espacio vectorial V, como un homomorfismo de grupos:

$$F : G \to \mathrm{End}(V).$$

Observación 15. *Es usual escribir $GL(V)$ para el hom-set $\mathrm{End}(V)$, donde cada elemento es un isomorfismo en* ***Vect$_k$****; esto es, el conjunto de transformaciones lineales invertibles en V. Es conocido también como el grupo lineal general de V.*

Ejemplo 6.9. *De manera general, dado un elemento X de cualquier categoría $\mathscr{A}$, podemos hablar de una* ***representación*** *de un grupo G, en X; como un funtor*

$$F : \mathscr{G} \to \mathscr{A},$$

donde, de nuevo, $F(\bullet) = X$.

Observación 16. *Como sabemos que los monoides, anillos, entre otros, pueden verse como categorías de un solo objeto $\bullet$, tal que sus flechas tienen impuestas ciertas características; entonces también pueden generar representaciones de la misma forma que los grupos.*

Así, por ejemplo, una representación de anillo en un objeto X, es un funtor

$$F : \mathscr{R} \to \mathscr{A},$$

donde $\mathscr{R}$ es un anillo visto como categoría, $X \in \mathscr{A}$ y $F(\bullet) = X$.

Ejemplo 6.10. *Dado un grupo G, para cada $x, y \in G$ definimos su **conmutador** como el producto $xyx^{-1}y^{-1}$ y notado por $[x, y]$. El conjunto de todos los productos de conmutadores es de hecho un subgrupo normal de G (compruébelo), se conoce como el **subgrupo conmutador** y es notado por:*

$$[G, G] = \langle [x, y] \ \ con \ \ x, y \in G \rangle,$$

es decir, es el grupo generado por todos los conmutadores. Consideremos un homomorfismo

$$\phi : G \to H,$$

donde H es otro grupo. Notemos que $\phi([x, y]) = \phi(xyx^{-1}y^{-1}) = \phi(x)\phi(y)(\phi(x))^{-1}(\phi(y))^{-1} = [\phi(x), \phi(y)]$ por lo tanto ϕ induce también una función $[G, G] \to [H, H]$ la cual es un homomorfismo y finalmente podemos definir el funtor

$$[., .] : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$$

$$G \mapsto [G, G]$$

El subgrupo conmutador es una medida para saber qué tan "conmutativo" es G, porque si G es abeliano entonces $[G, G]$ es el grupo trivial, más aún, tenemos el siguiente resultado clásico

$$\text{Si } K \text{ es normal, entonces } G/K \text{ es un grupo abeliano} \Leftrightarrow [G, G] \text{ es subgrupo de } K.$$

*El lector puede revisar el libro "Abstract Algebra" de Dummitt y Foote, pág 179, proposición 7 para una demostración de este hecho. En particular tenemos que $G/[G, G]$ es abeliano para cualquier grupo G y se lo conocerá como su **abelianización**.*

De manera similar, un homomorfismo $\phi : G \to H$ también induce un homomorfismo $G/[G, G] \to H/[H, H]$, con lo cual podemos definir el funtor:

$$\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$$

$$G \mapsto G/[G, G]$$

*conocido como el **funtor factor-conmutador**.*

Ejemplo 6.11 (Continuación del grupo fundamental)**.** *Podemos ver al grupo fundamental como un funtor $\pi_1 : \mathbf{Top}^* \to \mathbf{Grp}$ tal que a cada espacio topológico X con punto distinguido x se le asocia su grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ y para cada función continua $f : X \to Y$, con $f(x) = y$, se le asocia un homomorfismo de grupos $\pi(f) : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ definido como $\pi_1(f)([g]) = [f * g]$. Ya hemos probado que esta operación está bien definida. Se deja al lector probar que es un homomorfismo de grupo.*

Ejemplo 6.12. *Inspirados en el ejemplo 6.4 podemos, con una categoría $\mathscr{A}$ y un elemento A, tratar de crear un funtor $\mathrm{Hom}(-, A) : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$ tal que cualquier $B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ se le asigna $\mathrm{Hom}(B, A)$.*

Sin embargo, dado $g : B \to B'$, habíamos construido en la lección 2 a $\mathrm{Hom}(g, A)$ como una función de conjuntos $\mathrm{Hom}(B', A) \to \mathrm{Hom}(B, A)$, por lo tanto el supuesto funtor $\mathrm{Hom}(-, A)$ no respeta la dirección de las flechas.

Esto motiva nuestro siguiente concepto.

Definición. *Diremos que un funtor* $F : \mathscr{A}^{op} \to \mathscr{B}$ *es un funtor contravariante de* $\mathscr{A}$ *hacia* $\mathscr{B}$*.*

Observación 17. *Un funtor contravariante de* $\mathscr{A}$ *hacia* $\mathscr{B}$ *tiene las mismas propiedades que un funtor* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *a excepción de que para todo* $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A})$*, si* $f : A \to B$*, entonces* $F(f) : F(B) \to F(A)$ *y además* $F(f' \circ f) = F(f) \circ F(f')$*, cada vez que la composición de* f' *y* f *tenga sentido en* $\mathscr{A}$*.*

No es difícil verificar entonces que $\mathrm{Hom}(-, A) : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$ *es un funtor contravariante, o lo que es lo mismo que es un funtor* $\mathscr{A}^{op} \to \mathbf{Set}$*.*

Este funtor contravariante también es usual escribirlo como h_A *o* H_A

Notación. *En ocasiones, para evitar confusiones, nos referiremos a los funtores en el sentido usual como* ***funtores covariantes****.*

Un ejemplo derivado de 6.12 pero muy importante es el siguiente

Ejemplo 6.13. *Como* k*, un campo, es también un espacio vectorial sobre si mismo, entonces, en la categoría* $\mathbf{Vect}_k$*, podemos crear el funtor contravariante*

$$\mathrm{Hom}(-, k) : \mathbf{Vect}_k^{op} \to \mathbf{Vect}_k.$$

Es fácil darse cuenta que a cada espacio vectorial le asocia su espacio vectorial dual, así que también se lo nota como $(-)^*$*.*

Otros ejemplos que reflejan construcciones básicas son los siguientes.

Ejemplo 6.14. *Existe un funtor contravariante que va de* $\mathbf{Set}$ *a* $\mathbf{Set}$*, es decir un funtor*

$$\mathscr{P} : \mathbf{Set}^{op} \to \mathbf{Set},$$

tal que a cada conjunto A *se le asocia* $\mathscr{P}(A)$*, su conjunto partes. Si se tiene una función* $f : A \to B$*, entonces se define* $\mathscr{P}(f) : \mathscr{P}(B) \to \mathscr{P}(A)$*, que envía para cada* $X \in \mathscr{P}(B)$*, el conjunto* $f^{-1}(X) \in \mathscr{P}(A)$*.*

Ejemplo 6.15. *Un funtor contravariante* $\mathscr{A}^{op} \to \mathbf{Set}$*, se lo conoce también como un* ***presheaf*** *o* ***prehaz*** *en* $\mathscr{A}$*.*

Ejemplo 6.16. *Sea* $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{Top})$*, definimos ahora el conjunto* $C(X)$ *de las funciones continuas real valuadas en* X *y lo armamos de una operación suma y producto punto por punto, esto significa que para todo* $f, g \in C(X)$ *y* $x \in X$ *se define* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ *y* $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$*. De esta manera es una anillo conmutativo.*

Para crear un funtor necesitamos asignar imágenes a las flechas, sea $f : X \to Y$ *una función continua, definimos* $C(f) : C(Y) \to C(X)$ *como la aplicación, que a todo* $f \in C(Y)$ *le asigna la composición* $q \circ f \in C(X)$*. Es así que tenemos el funtor contravariante*

$$C : \mathbf{Top}^{op} \to \mathbf{Ab}.$$

Observación 18. *Revisando los ejemplos vistos, resaltamos dos de gran importancia:*

- *El funtor covariante* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, -)$*, el cual dado un* $g : B \to B'$ *asigna una función* $g_* := \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, g)$ *que actúa por* ***post-composición****, lo cual significa que* $g_*(f) = g \circ f$ *para todo* f *con* $\mathrm{Hom}(A, B)$*.*

- *El funtor contravariant* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, A)$*, el cual dado un* $g : B \to B'$ *asigna una función* $g^* = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, g)$ *que actúa por* ***pre-composición****, es decir que,* $g^*(f) = f \circ g$ *para todo* f *con* $\mathrm{Hom}(B', A)$*.*

Este tipo de procedimiento para generalizar funciones y la manera en que respetan o invierten el sentido de las flechas, es un patrón que se mantiene en muchas ramas de la matemáticas. Realizar una post-composicion tambien es conocido como realizar un ***pushforward*** *y a las precomposición tambien se lo conoce como* ***pullover****, estos términos son familiares para quien ha estudiado formas diferenciales y homología.*

Finalmente, nos podemos preguntar qué tipo de funtor resultan de combinar los dos tipos de composiciones presentadas.

Definición. *Dada una categoría* $\mathscr{A}$ *entonces un* ***funtor representado en ambos lados*** *es un funtor*

$$\mathrm{Hom}(-, -) : \mathscr{A}^{op} \times \mathscr{A} \to \mathbf{Set},$$

donde cada par de objetos $(x, y) \in \mathscr{A}^{op} \times \mathscr{A}$ *se les asigna el hom-set* $\mathrm{Hom}(x, y)$ *y para par de flechas* $f : w \to x$*,* $h : y \to z$ *se les asigna la función*

$$\begin{aligned} (f^*, h_*) : \ & \mathrm{Hom}(x, y) \to \mathrm{Hom}(w, z) \\ & g \mapsto hgf. \end{aligned}$$

Observemos que en la definición se tiene que $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A}^{op})$, por lo tanto debe actuar por precomposición para que $\mathrm{Hom}(-, -)$ mantenga su propiedad de ser funtor.

El anterior ejemplo es un caso particular de lo siguiente.

Definición. *Un* ***bifuntor*** *es un funtor* $F : \mathscr{B} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$*, donde* $\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ *son categorías.*

Se presenta una propiedad importante, usada a menudo para construir bifuntores.

Lema 6.2. *Sean* $\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ *categorías. Supongamos que tenemos para todo* $B \in \mathrm{ob}(\mathscr{B})$ *y* $C \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})$*, funtores:*

$$L_C : \mathscr{B} \to \mathscr{D}, \qquad M_B : \mathscr{C} \to \mathscr{B},$$

tales que $M_B(C) = L_C(B)$*. Entonces existe un bifuntor*

$$S : \mathscr{B} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D},$$

tal que $S(-, C) = L_C$ *y* $S(B, -) = M_B$ *para todo par* $(B, C) \in ob(\mathscr{B} \times \mathscr{C})$ *si y solamente si para cada par de flechas* $f : B \to B'$ *y* $g : C \to C'$ *se cumple que*

$$M_{B'}(g) \circ L_C(f) = L_{C'}(f) \circ M_B(g). \tag{*}$$

Demostración. ($\Longrightarrow$) Notemos que dado cualesquier par de flechas $f : B \to B'$ y $g : C \to C'$ en $\mathrm{Hom}(\mathscr{B})$ y $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ respectivamente se tiene

$$(1_{B'}, g) \circ (f, 1_C) = (1_B' f, g 1_C) = (f, g) = (f, 1_{C'}) \circ (1_B, g).$$

Aplicando S obtenemos que

$$S(1_{B'}, g) S(f, 1_C) = S(f, 1_{C'}) S(1_B, g). \tag{1}$$

Esto lo podemos escribir como el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S(B,C) & \xrightarrow{S(1_B,g)} & S(B,C') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle S(f,1_C)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle S(f,1_{C'})} \\ S(B',C) & \xrightarrow{S(1_{B'},g)} & S(B',C') \end{array}$$

Pero por hipotesis se tiene que $M_B(g) = S(B,-)(g) : S(B,C) \to S(B,C')$ por tanto $M_B(g) = S(f,1_c)$, de manera similar para las otras flechas en $(*)$, de tal manera que (1) implica $(*)$.

$(\Longleftarrow)$ Teniendo $(*)$ podemos definir $S(B,C) = M_{B'}(g) \circ L_C(f) = L_{C'}(f) \circ M_B(g)$ para todo B, C y se verifica que $S(-,C) = L_C$ y $S(B,-) = M_B$. $\square$

El comportamiento que tienen los funtores en los isomorfismos de una categoría, se da a continuación.

Lema 6.3 (Los funtores preservan los isomorfismos)**.** *Sea un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, entonces para todo $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A})$ que sea isomorfismo, se tiene que $F(f)$ lo es también.*

Demostración. La demostración es sencilla, sea $f : x \to y$ isomorfismo en $\mathscr{A}$ y $g : y \to x$ su inverso, gracias a la definición de funtor tenemos que

$$1_{F(y)} = F(1_y) = F(fg) = F(f)F(g).$$

Asi se tiene que $F(g)$ es el inverso por la derecha de $F(f)$ en $\mathscr{B}$, de manera análoga, es un inverso por la izquierda. $\square$

Usando este resultado para el funtor $\pi_1 : \mathbf{Top}^* \to \mathbf{Grp}$ podemos deducir rápidamente el lema 1.2.12, ya que obtendremos que si $(X,x), (Y,y)$ son isomorfos en $\mathbf{Top}^*$ (esto es, son homeomorfos) entonces $\pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ son isomorfos en $\mathbf{Grp}$, en particular si es que X, Y son ambos arcoconexos entonces no importa el punto distinguido y podemos decir que $\pi(X) \cong \pi(Y)$ en $\mathbf{Grp}$.

Observación 19. *El recíproco del anterior lema no es cierto. Consideremos, por ejemplo, el funtor*

$$U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set},$$

el cual envía cada grupo al conjunto de sus elementos y a cada homomorfismo de grupo se le asigna la misma flecha, vista como una función entre conjuntos. Este tipo de funtores los investigaremos más adelante y se los conocerá como ***funtores olvidadizos****, en el sentido de que pierden información de los objetos y flechas, en este caso la estructura de grupo ha sido olvidada.*

Los grupos $\mathbb{Z}_6$ y S_3 tienen ambos 6 elementos y por lo tanto vistos como conjuntos son isomorfos, sin embargo tenemos que en ***Grp*** *no pueden ser isomorfos pues el primero es abeliano y el segundo no lo es.*

Terminamos esta lección con algunos ejercicios resueltos acerca de funtores.

Ejercicio Resuelto 1

Definir 2 funtores distintos

$$T : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp},$$

tal que $T(G) = G$ para todo grupo G y T no es el funtor identidad

Demostración. Consideramos un grupo G_0 tal que su grupo de automorfismos, $\overline{G_0} := \mathrm{Aut}(G_0) = \mathrm{Hom}(G_0, G_0)$ tiene como centro un subgrupo propio. Por ejemplo, podemos tomar $G_0 = S_n$ con $n \neq 1, 2, 6$ (ya que aquí se sabe que $S_n = \overline{S_n}$ y por tanto S_n tiene como centro al grupo trivial). Luego, esto implica que existen $f_1, f_2 \in \overline{G_0}$ tales que $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$.

Definimos T declarando $T(G) = G$ para todo grupo G y para las flechas consideramos los siguientes casos:

$T(f) = f_1 f f_1^{-1}$ para todo $f \in \overline{G_0}$.

$T(f) = f_1 f$ para todo $f \in \mathrm{Hom}(G, G_0)$ con $G \neq G_0$.

$T(f) = f f_1^{-1}$ para todo $f \in \mathrm{Hom}(G_0, G)$ con $G \neq G_0$.

$T(f) = f$ para todo $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Grp})$ restante.

De esta manera T es un funtor, para comprobarlo es claro que basta con probar que $T(fg) = T(f)T(g)$ para todo $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Grp})$ donde al menos una de las dos flechas pertenece a los 3 primeros casos.

Por ejemplo, si $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $g \in \mathrm{Hom}(G_0, G)$ entonces $T(fg) = (fg)f_1^{-1} = f(gf_1^{-1}) = T(f)T(g)$.

Si ahora $f \in \overline{G_0}$, $g \in \mathrm{Hom}(G, G_0)$, entonces $T(fg) = f_1(fg) = (f_1 f f_1^{-1})(f_1 g) = T(f)T(g)$.

Por otro lado, si $f \in \mathrm{Hom}(G_0, G)$, $g \in \overline{G_0}$ entonces $T(fg) = (fg)f_1^{-1} = (ff_1^{-1})(f_1 g f_1^{-1}) = T(f)T(g)$.

Los casos restantes también se comprueban fácilmente.

El funtor T no es la identidad, ya que si tomamos $f_2 \in \overline{G_0}$ descrito antes y entonces vemos que $T(f_2) = f_1 f_2 f_1^{-1} \neq f_2$. Así T no es la identidad. Podemos crear otro funtor con la misma cualidad simplemente tomando distinto G_0. $\square$

Ejercicio Resuelto 2

Demuestre que las siguientes asignaciones son funtores:

$$\begin{aligned} F : \mathbf{Grp} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ G &\longmapsto \{H : H \leqslant G\} \end{aligned}$$

donde $H \leqslant G$ significa que H es subgrupo de G.

$$\begin{aligned} G : \mathbf{Ring} &\longrightarrow \mathbf{Ring} \\ N &\longmapsto N[x] \end{aligned}$$

donde $N[x]$ es el anillo de polinomios en N.

Demostración. i) Es claro que para todo grupo G se tiene que $F(G)$ es un conjunto, Ahora para $f \in \mathrm{Hom}(G, G')$ definimos un $F(f) : \{H : H \leqslant G\} \to \{H' : H' \leqslant G'\}$ de la siguiente manera:

$$F(f)(H) = f(H) \leqslant G',$$

esto está justificado pues $f(H)$ es un subgrupo, porque como f es un homomorfismo de grupo entonces $f(e_G) = e'_G$. Si es que $y_1, y_2 \in f(H)$, entonces para algunos $x_1, x_2 \in H$ se tiene que

$$y_1 \cdot y_2 = f(x_1)f(x_2) = f(x_1 x_2) \in f(H).$$

Finalmente, si $y = f(x) \in f(H)$ entonces $y^{-1} = f(x^{-1}) \in f(H)$.

Además, es evidente que $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$; por lo tanto F es un funtor.

ii) $G(N) = N[x]$ es un anillo, para todo anillo N. Ahora si $f \in \mathrm{Hom}(N_1, N_2)$ es un homomorfismo de anillo podemos definir $G(f) : N_1[x] \to N_2[x]$ de la siguiente manera:

$$G(f)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) x^i$$

para todo $a_i \in N_1$ y $n \in \mathbb{N}$. Esta función está bien definida y es sencillo observar que es un funtor, pues

$$(G(f) \circ G(g))\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = G(f)\left(\sum_{i=0}^{n} g(a_i) x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} f(g(a_i)) x^i = G(f \circ g)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)$$

$\square$